

# Chapitre 1

## Logique et raisonnements

EXERCICE 1.1. On connaît le carré magique ci-dessous, formé sur tous les entiers naturels de 1 à 9. On voit que les huit sommes, dans les trois lignes, les trois colonnes et les deux diagonales valent toutes 15.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

On se propose de construire un carré magique sur tous les entiers de l'ensemble suivant :

$$\mathcal{E} = \{0, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 16\}$$

On note  $\sigma$  la somme commune dans les trois lignes, les trois colonnes et les deux diagonales.

1. Calculez la valeur de  $\sigma$ . Vérifier que l'on trouve  $\sigma = 24$ .
2. Décomposez le nombre 24 de toutes les manières possibles en tant que somme de trois éléments distincts de  $\mathcal{E}$ , dans le sens décroissant. Vérifiez qu'il y a huit décompositions possibles.
3. Indiquez, pour chaque élément de  $\mathcal{E}$ , combien de fois il apparaît dans les huit décompositions de la précédente question. On pourra dresser un tableau en deux lignes.
4. En déduire quel est le nombre qui occupe le centre du carré magique, quels sont les nombres qui doivent être dans les coins et enfin, ceux qui doivent occuper les milieux des côtés du carré.
5. Donnez une solution du problème.
6. Montrez que dans tout carré magique de trois lignes et de trois colonnes, quels que soient les nombres qui le composent, la somme  $\sigma$  commune dans les lignes, colonnes et diagonales est égal à trois fois l'élément central.

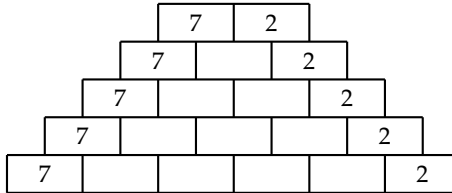
EXERCICE 1.2. Complétez le carré magique que voici, sachant que  $x + y = 0$ .

$x$		0
	1	
$y$		4

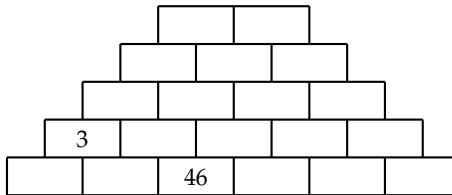
EXERCICE 1.3. On appelle pyramide de Pascal un empilement de cases complétées de la manière suivante :

- a) on choisit deux nombres entiers positifs  $m$  et  $n$ ;
- b) le premier nombre de chaque ligne est égal à  $m$  (dans l'exemple ci-dessous  $m = 7$ )

- c) le dernier nombre de chaque ligne est égal à  $n$  (dans l'exemple ci-dessous  $n = 2$ );  
 d) un nombre inscrit dans une case est égal à la somme des nombres inscrits dans les deux cases situées juste au-dessus.



- 1) a. Reproduisez et complétez l'exemple de pyramide de Pascal ci-dessus.  
 b. Pour chaque ligne, calculez la somme des nombres figurant sur celle-ci. Que remarquez-vous?
- 2) Si l'on considère la pyramide de Pascal associée aux nombres entiers  $m = 1$  et  $n = 1$ , sur quelle ligne la somme des nombres sera-t-elle égale à 1024?
- 3) Prouver que, pour des nombres entiers  $m$  et  $n$  quelconques, la somme des nombres de la quatrième ligne est égale au double de la somme des nombres de la troisième ligne.
- 4) Reproduisez et complétez la pyramide de Pascal ci-dessous.



EXERCICE 1.4. Un agent du recensement frappe à la porte d'une maison et après s'être courtoisement présenté, demande à la personne qui lui a ouvert combien d'enfants a-t-elle et quels sont leurs âges.

- J'ai trois filles, leurs âges sont des nombres naturels et le produit de ceux-ci vaut 36.
- C'est sans doute une information nécessaire mais loin d'être suffisante, dit l'agent.
- Sans doute... Mais si je vous donnais la somme de leurs âges vous ne seriez pas plus avancé!
- Ne pourriez-vous pas me donner une information supplémentaire?
- Et bien... Annie ma fille aînée a un chat et deux poissons rouges, l'âge de ces trois animaux sont des nombres naturels et leur produit vaut 6...

Fort de cette information supplémentaire, l'agent du recensement prend congé de la personne et s'en retourne, le sentiment du devoir accompli, vers de nouvelles aventures... Déterminez vous aussi les âges de trois filles...